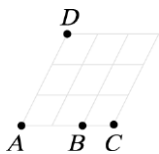


填充題（每題 2 分，共 100 分）

【最後有簡答供同學參考，繳交作業時各題應附上計算過程，否則不算繳交】

1. 如圖，九個相同的平行四邊形拼成的圖形中，若  $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，則  $x+y =$  【            】。



2. 方程式  $\sin x = \frac{x}{7\pi}$  的實數解個數有 【            】 個。

3. 設  $|\overrightarrow{a}| = 3$ ， $|\overrightarrow{b}| = 2$ ， $\overrightarrow{a}$  與  $\overrightarrow{b}$  的夾角為  $120^\circ$ ，若  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ ， $\overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ ，則  $|\overrightarrow{QP}|$  為 【            】。

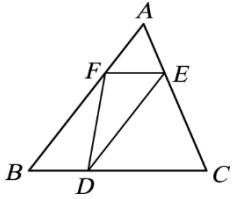
4. 函數圖形  $y = \log_2 x$  與直線  $y = 3$  之交點坐標為 【            】。

5. 小興和小附一起練習踢足球。假設足球場地是一個坐標平面，當小興在起點  $P(-15, 2)$  將球沿著向量  $(5, k)$  的方向踢出一段 30 單位長的線段後，恰好被在  $y$  軸上的小附用腳控制，將球停在該線段上的點  $Q(0, w)$ 。若  $k$  為正實數，則  $k$  值 = 【            】。

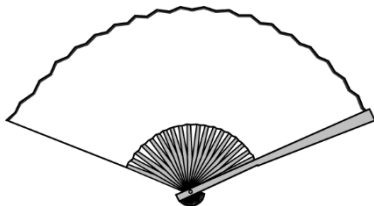
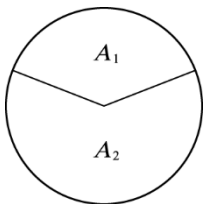
6. 方程式  $(\log_9 x)^2 - 2\log_3 x + 4 = 0$  的解為  $x =$  【            】。

7. 設  $\overrightarrow{a} = (-5, 5)$ ， $\overrightarrow{b} = (1, -1)$ ， $\overrightarrow{c} = (2, 3)$ ，若  $\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$  與  $\overrightarrow{c}$  平行，則  $t =$  【            】。

8. 如圖，在 $\triangle ABC$ 的三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 上分別取 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 三點使得 $\overline{DC} = 2\overline{BD}$ ， $\overline{EC} = 2\overline{AE}$ ， $\overline{FB} = 2\overline{AF}$ ，設 $G$ 為 $\triangle DEF$ 的重心， $\overrightarrow{AG} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ ，則數對 $(\alpha, \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



9. 對任意實數 $x$ 而言， $81^{x^2-x+1}$ 的最小值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
10.  $\log_3 5 \times \log_5 18 \times \log_{18} 243 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
11. 方程式 $x - 6 \sin(2x) = 0$ 的實根個數有  $\underline{\hspace{2cm}}$  個。
12.  $\sin 67.5^\circ \cos 22.5^\circ - \cos 67.5^\circ \sin 22.5^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
13. 若一圓形中分割出來的扇形面積 $(A_1)$ 與剩餘面積 $(A_2)$ 的比值為 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，則稱此扇形為符合黃金比例的扇形，一把符合黃金比例的摺扇，是指完全張開時符合上述的比例特性，試問黃金比例的摺扇完全張開時的角度為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



14. 若對數 $\log_{(x-1)}(3-x)$ 有意義，求 $x$ 的範圍為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
15. 若方程式 $10^x - 2 \times 5^x - 3 \times 2^x + 6 = 0$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16.  $\cos 40^\circ \sin 160^\circ - \sin 220^\circ \cos 340^\circ = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

17. 解  $\log_3 (x-1) + \log_3 (x+1) = 1$ ，則  $x = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

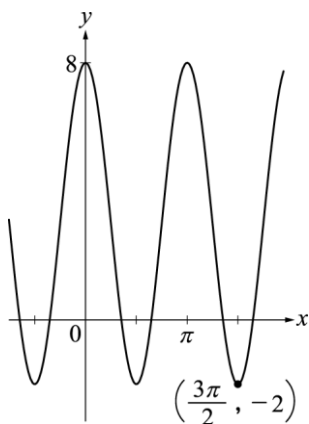
18. 坐標平面上兩點  $A(3, 0)$ ， $B(1, 1)$ ，設直線  $AB$  與直線  $L: x-3y-3=0$  的夾角為  $\theta$ ，則  $\theta = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。（兩解）

19. 設  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\sin \beta = -\frac{15}{17}$ ，且  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ， $180^\circ < \beta < 270^\circ$ ，試求  $\sin(\alpha - \beta)$  與  $\cos(\alpha - \beta)$  之和為  $\text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

20. 蒲福風級 (Beaufort scale) 是由英國海軍上將蒲福 (Francis Beaufort) 於 1805 年發明，用風力等級來表示風的強弱程度。經過多次修正，目前使用的經驗關係式為  $V = 0.836 \times B^{\frac{3}{2}}$ ，其中  $B$  為蒲福風級， $V$  為風速 (公尺／秒)。某次颱風來襲，氣象局預測海上風力可達 9 級 (稱為烈風 strong gale)，則利用上述經驗關係式推算，風速可達  $\text{【 } \quad \quad \text{】}$  公尺／秒。(四捨五入至小數點後第一位) (資料來源：交通部中央氣象署)

21. 設  $x, y$  為實數，且  $x+y=8$ ，若  $\log_2 4x + \log_2 y$  的最大值為  $M$ ，此時  $x$  之值為  $t$ ，則數對  $(M, t) = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

22. 函數  $y = a \cos (bx) + c$  部分圖形如圖，若  $a, b, c > 0$ ，試求  $abc = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

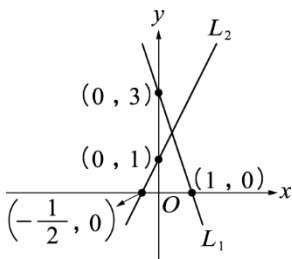


23. 已知兩直線  $a_1x + b_1y = c_1$  與  $a_2x + b_2y = c_2$  恰有一交點為  $(4, 2)$ ，則另外兩直線  $2b_1x + (2a_1 - b_1)y + 3c_1 = 0$  與  $2b_2x + (2a_2 - b_2)y + 3c_2 = 0$  的交點坐標為【           】。

24. 若  $\log_{x-8}(-x^2 + 17x - 70)$  有意義，則實數  $x$  的範圍為【           】。

25. 設  $x, y$  為實數，且  $2x + 3y = 12$ ，若  $\log_2 x + \log_2 y$  的最大值為  $M$ ，此時  $x$  之值為  $t$ ，則數對  $(M, t) =$ 【           】。

26. 如圖，坐標平面上有兩直線  $L_1$  及  $L_2$ ，直線  $L_1$  通過點  $(1, 0)$  及點  $(0, 3)$ ，直線  $L_2$  通過點  $(-\frac{1}{2}, 0)$  及點  $(0, 1)$ ，則此兩直線夾角為【           】度。



27. 設正實數  $a, b$  滿足  $(\log a)(\log b) + \log a + \log b = 2$ ，且  $\log_a b = 2$ ，則  $a$  之值為【           】。  
(兩解)

28. 若  $\log_{(x-2)}(-x^2 + 7x - 6)$  有意義，則  $x$  的範圍為【           】。

29. 平面上有兩向量  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ，已知  $2\vec{a} + \vec{b}$ ， $3\vec{a} - 2\vec{b}$  所圍成的平行四邊形面積為 63，則  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  所圍成的平行四邊形面積為【           】。

30. 坐標平面上兩向量  $\vec{AB}$ 、 $\vec{CD}$ ，其中  $A(-3, 4)$ ， $B(1, 2)$ ； $\vec{CD}$  長度為 6 單位，且與  $x$  軸正向夾角為  $120^\circ$ ，則  $\vec{AB} + \vec{CD}$  為【           】。(以坐標表示法作答)

31. 已知過點  $P(0, 4)$  且與直線  $L: y=x$  垂直的直線，分別交  $f(x) = a^x$  與  $g(x) = \log_a x$  兩圖形於  $A, B$  兩點，若  $\overline{PA} = \sqrt{2}$ ，則  $\overline{PB} =$  【            】。
32. 已知  $2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ ， $\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$  兩向量所張成的平行四邊形面積為 10，試求  $2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$ ， $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$  兩向量所張成的平行四邊形面積為 【            】。
33.  $\cos 200^\circ \sin 100^\circ + \cos 280^\circ \sin 160^\circ =$  【            】。
34. 已知行列式  $\begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & 3b_1 - 2a_1 \\ a_2 + 2b_2 & 3b_2 - 2a_2 \end{vmatrix} = 14$ ， $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -2$ ， $\begin{vmatrix} 3c_1 & 3a_1 \\ 3c_2 & 3a_2 \end{vmatrix} = 3$ ，求聯立方程式  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  的解  $(x, y)$  為 【            】。
35. 若  $\begin{vmatrix} 3a - 2b & 5a + 4b \\ 3c - 2d & 5c + 4d \end{vmatrix} = 5$ ，則  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$  【            】。
36. 設  $f(x) = 4(\sqrt{7} \cos^3 x + \sqrt{2} \sin^3 x) - 3(\sqrt{7} \cos x + \sqrt{2} \sin x)$ ，且  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ，求  $f(x)$  之最小值  $m =$  【            】。
37. 將  $y = \log_2 x$  的圖形，向左平移  $a$  單位，再向上平移  $b$  單位，可得到  $y = \log_2(4x + 16)$  函數的圖形，試求數對  $(a, b) =$  【            】。
38. 已知  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 6$  且  $\angle A = 2\angle C$ ，則  $\overline{AC} =$  【            】。

39. 設  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  ,  $\frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}$  且  $\sin x \cos y = -\frac{1}{4}$  ,  $\cos x \sin y = -\frac{3}{4}$  , 則  $x+y$  為【           】。

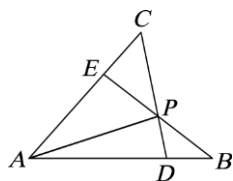
40. 設  $x, y$  為正數且  $2x+y=8$  , 若  $x=x_0, y=y_0$  時,  $\log_2 x + \log_4 y^2$  有最大值  $M$  , 則序組  $(x_0, y_0, M) =$  【           】。

41. 試求  $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 3^\circ) \cdots \cdots (1+\tan 42^\circ)(1+\tan 43^\circ)(1+\tan 44^\circ) =$  【           】。

42. 化簡  $(\log 2)^3 + (\log 5)(\log 8) + (\log 5)^3 =$  【           】。

43. 化簡求值  $\log_{\sqrt{5}} 2 + 3 \log_5 \frac{5}{2} - \log_5 \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \log_5 49 =$  【           】。

44. 如圖,  $\triangle ACD$  中,  $E$  在  $\overline{AC}$  上且  $2\overline{CE} = \overline{AE}$  ,  $B$  在  $\overline{AD}$  延長線上且  $3\overline{BD} = \overline{AD}$  , 設  $\overline{BE}$  與  $\overline{CD}$  相交於  $P$  , 若  $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$  , 則數對  $(x, y) =$  【           】。



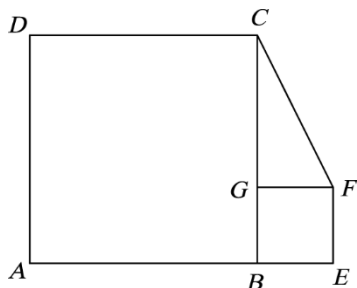
45. 如圖所示, 一個大的正八角星的頂點為周圍八個全等的小正八角星中心, 相鄰的兩個小八角星有一個共同的頂點。觀察圖中虛線部分, 設小八角星頂點  $C$  到其中心  $A$  的距離為  $a$  , 大八角星頂點  $A$  到其中心  $O$  的距離為  $b$  。試問  $a:b$  的比值為【           】。



46. 圓直徑  $\overline{AB} = 1$ ，圓上有一個動點  $P$ ，若  $\overline{PA} = \alpha$  時， $2\overline{PA} + 5\overline{PB}$  有最大值  $M$ ，則數對  $(\alpha, M) =$  【            】。

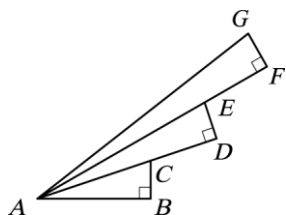
47. 將函數  $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^{x^2-3x-7}$  的圖形向下平移 0.001，試求平移後的圖形與  $x$  軸的交點坐標為 【            】。

48. 如圖，有兩正方形  $ABCD$  與  $BEFG$  的面積和為 1， $A, B, E$  三點共線，若  $\overline{BC} \perp \overline{GF}$ ，則  $\triangle GFC$  面積的最大值為 【            】。



49. 設  $x$  為實數， $f(x) = 1 + \sin x + \cos x - \sin x \cos x$ ，則  $f(x)$  的最小值為 【            】。

50. 小綠設計了一款新式的帆船的帆（如下圖），它是由 3 個直角三角形所組成（ $\angle B = \angle D = \angle F = 90^\circ$ ），其中  $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 1$ ， $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{DE} = 1$ ， $\overline{AF} = 7$ ， $\overline{FG} = 1$ ，則此帆的高度為 【            】。（即  $G$  到直線  $AB$  距離）



◆ 參考簡答

1.  $-\frac{1}{2}$
2. 15
3.  $2\sqrt{13}$
4. (8, 3)
5.  $5\sqrt{3}$
6. 81
7. 5
8.  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$
9. 27
10. 5
11. 7
12.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
13.  $(3-\sqrt{5})\pi$
14.  $1 < x < 3$ , 且  $x \neq 2$
15. 1 或  $\log_5 3$
16.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
17. 2
18.  $45^\circ$  或  $135^\circ$
19.  $\frac{113}{85}$
20. 22.6
21. (6, 4)
22. 30
23. (-6, -6)
24.  $8 < x < 10$ , 且  $x \neq 9$
25.  $(\log_2 6, 3)$
26.  $\frac{\pi}{4}$  或  $\frac{3\pi}{4}$
27.  $\sqrt{10}$  或  $\frac{1}{100}$
28.  $2 < x < 6$ , 但  $x \neq 3$
29. 9
30.  $(1, -2+3\sqrt{3})$
31.  $3\sqrt{2}$
32.  $\frac{40}{7}$
33.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
34.  $\left(-1, -\frac{1}{6}\right)$
35.  $\frac{5}{22}$
36.  $\frac{-2-\sqrt{14}}{2}$

37. (4, 2)
38. 5
39.  $\frac{3\pi}{2}$
40. (2, 4, 3)
41.  $2^{22}$
42. 1
43. 4
44.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
45.  $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
46.  $\left(\frac{2\sqrt{29}}{29}, \sqrt{29}\right)$
47. (-2, 0), (5, 0)
48.  $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$
49.  $\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$