國立基隆高中　113 學年度 第二學期　高二數學 A 暑假作業

範圍：數學 4A　　班級：______　座號：______姓名：__________

一、單一選擇題

1. (　)已知空間中四條直線 L_1：$\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$，$L_2$：$\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$，$L_3$：$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$，$L_4$：$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z}{-2}$，試問下列哪一組直線不共平面？
（A）L_1 與 L_2　（B）L_1 與 L_3　（C）L_1 與 L_4　（D）L_2 與 L_3　（E）L_3 與 L_4。

2. (　)直線 L：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ 與下列各選項中，哪一選項之平面平行？　（A）$2x-y+3z=4$
（B）$x-y-z=-2$　（C）$2x-3y+4z=3$　（D）$x+5y+z=8$　（E）$2x+7y+z=10$。

3. (　) 坐標平面上的封閉區域經下列哪個矩陣作線性變換後，所得新的封閉區域的面積會變小？　（A）$M_1=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$　（B）$M_2=\begin{bmatrix}0.4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$　（C）$M_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$
（D）$M_4=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}$　（E）$M_5=\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & \sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & -\cos 45^\circ\end{bmatrix}$。

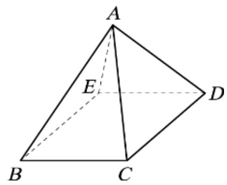
4. (　) 已知聯立方程式 $\begin{cases}2x+y-2z=3\\ 3x-y+z=1\\ ax+y-3z=4\end{cases}$ 無解，則 a 的值為何？　（A）3　（B）4　（C）5　（D）6
（E）7。

5. (　) 令 $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，$B=I+A+A^{-1}$，試選出代表 BA 的選項。　（A）$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
（B）$\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$　（C）$\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$　（E）$\begin{bmatrix}6 & 6\\ 18 & 24\end{bmatrix}$。

6. (　　)已知某地區有 30 ％的人口感染某傳染病。針對該傳染病的快篩試劑檢驗，有陽性或陰性兩結果。已知該試劑將染病者判為陽性的機率為 80 ％，將未染病者判為陰性的機率則為 60 ％。為降低該試劑將染病者誤判為陰性的情況，專家建議連續採檢三次。若單次採檢判為陰性者中，染病者的機率為 P；而連續採檢三次皆判為陰性者中，染病者的機率為 P'。試問 $\frac{P}{P'}$ 最接近哪一選項？　(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10　(E) 11。

7. (　　)袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球。由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？　(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{5}{12}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{3}{5}$　(E) $\frac{2}{3}$。

8. (　　)如圖，正四角錐 $A-BCDE$（底面為正方形，側面皆為正三角形），下列數值何者最大？　(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$　(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EC}$　(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}$　(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$。



9. (　　)點 $P(x，y，z)$ 是平面 $E：2x-y-3z+5=0$ 上的動點，求 $\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}$ 之最小值為何？　(A) $\frac{3}{\sqrt{14}}$　(B) $\frac{9}{\sqrt{14}}$　(C) $\frac{3}{14}$　(D) $\frac{9}{14}$　(E) $\frac{81}{14}$。

10. (　　)在空間坐標系中，原點 $O(0，0，0)$，到下列哪一個圖形的距離最小？　(A) $z=1$　(B) $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$　(C) $x+y=1$　(D) $x+y+z=1$　(E) $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$。

二、 多重選擇題

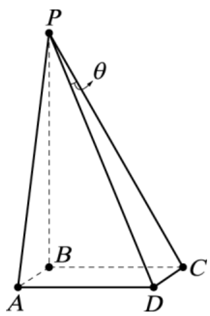
1. (　　)在空間坐標系中，下列哪些方程組的圖形為一直線？ （A）$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+4y-6z=3 \end{cases}$

（B）$x-2y=3$ （C）$\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{2y-3}{5}$，$z=1$ （D）$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t \\ z=3 \end{cases}$，$t\geq 0$ （E）$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=2 \\ 2x-y-z=3 \end{cases}$。

2. (　　)設 a、b 為實數，下列有關線性方程組 $x+2y-3z=1$，$x+3y-2z=-1$，及 $x+ay+bz=1$ 的敘述何者正確？ （A)若此線性方程組有解，則必定恰有一組解 （B)若 $a=1$，$b=1$ 時，則此線性方程組恰有一組解 （C)存在不只一組數對（a，b），使得此線性方程組無解 （D)若此線性方程組有解，則 $a-b=5$ （E)若此線性方程組有無限多解，則 $a^2+b^2=13$。

3. (　　)A、B、C 為 2 階方陣，I 為 2 階單位方陣，判斷下列關係哪些正確？ （A)若 det（A）$\neq 0$ 且 $AB=AC$，則 $B=C$ （B)若 $AB=AC$ 且 $B=C$，則 det（A）$\neq 0$ （C)若 A、B 都是轉移方陣，則 AB 也是轉移方陣 （D)若 A、B 都是轉移方陣，則 $\frac{1}{2}(A+B)$ B 也是轉移方陣 （E)若 $A-B$ 有反方陣，則（$A-B$）$^{-1}$（$B-A$）$=-I$。

4. (　　)如圖，四角錐 $P-ABCD$ 的底面是邊長為 1 的正方形，側邊 $\overline{PB}$ 垂直於底面，且 $\overline{PB}=\sqrt{3}$，令 $\angle CPD=\theta$。下列選項中，哪個選項正確？



（A）$\angle PCD=90^\circ$ （B）$\angle PDC=90^\circ$ （C）$\dfrac{1}{3}<\sin\theta<\dfrac{1}{2}$

（D）$\overline{AD}$ 至 $\overline{PC}$ 的最短距離為 1 （E）$\overline{PA}$ 至 $\overline{CD}$ 的最短距離為 1。

5. (　)設圓 C 之圓心為（0，0），且圓 C 之內接正六邊形一頂點為（2，2），則下列哪些點也是此正六邊形之頂點？ （A）（−2，−2） （B）$(\sqrt{3}-1，\sqrt{3}+1)$ （C）$(1+\sqrt{3}，1-\sqrt{3})$ （D）$(-1-\sqrt{3}，\sqrt{3}+1)$ （E）$(1-\sqrt{3}，1+\sqrt{3})$。

6. (　)下列敘述何者正確？ （A）空間中兩相異直線不平行必相交 （B）空間中，若兩相異直線 L_1，L_2 均與平面 E 平行，則 $L_1//L_2$ （C）空間中，兩平面相交於一直線，則此直線必與兩平面的法向量垂直 （D）空間中，兩歪斜線在一平面上之正射影有可能為兩平行線（E）空間中，設直線 L 在平面 E_1 上，若 L 垂直平面 E_2，則 $E_1\perp E_2$。

7. (　)空間中三向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 所張出的平行六面體體積為 2022，則下列哪些選項的三個向量所張出的平行六面體體積仍為 2022？ （A）$-\overrightarrow{a}$，$-\overrightarrow{b}$，$-\overrightarrow{c}$ （B）$3\overrightarrow{a}$，$3\overrightarrow{b}$，$3\overrightarrow{c}$ （C）$2\overrightarrow{a}$，$3\overrightarrow{b}$，$\frac{1}{6}\overrightarrow{c}$ （D）$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}$ （E）$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$。

8. (　)設 $\overrightarrow{a}=(x，y，z)$，$\overrightarrow{b}=(1，2，2)$，若 $|\overrightarrow{a}|=5$，則下列何者為真？ （A）$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最小值為−10 （B）$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為 15 （C）$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 有最大值時，$x=\frac{5}{3}$ （D）$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 有最大值時，$y=5$ （E）$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 有最大值時，$z=\frac{10}{3}$。

9. (　)坐標空間中，直線 L_1：$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$，$L_2$：$\begin{cases}y=4\\z=5\end{cases}$，則下列有關直線 L_1，L_2 的敘述哪些選項是正確的？ （A）直線 L_1 與 xy 平面垂直 （B）直線 L_2 與 x 軸平行 （C）直線 L_1 與 y 軸互為歪斜線 （D）直線 L_1 與直線 L_2 交於一點 （E）直線 L_1 在平面 $x=3$ 上。

三、填充題

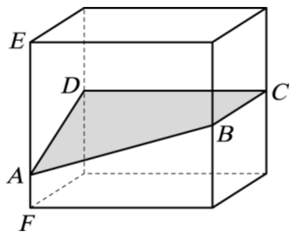
1. 有甲、乙兩支大瓶子，開始時兩瓶分別裝有 a 公升與 b 公升的水。依下列規則操作每一輪倒水的動作：

將甲瓶的水倒出一半到乙瓶，再將乙瓶的水倒出一半到甲瓶。

(1)寫出對應此操作的轉移矩陣為【　　　　】。

(2)若開始時甲瓶中的水量有 $\frac{3}{5}$ 公升，乙瓶中的水量有 $\frac{2}{5}$ 公升。第二輪後甲瓶的水量為【　　　　】公升。

2. 附圖是一個正立方體，其被一平面截一個四邊形 $ABCD$，其中 B、D 分別為邊的中點，且 $\overline{EA}：\overline{AF}=5：1$；試求 $\cos\angle DAB=$【　　　　】。



3. 同時投擲三顆公正的骰子一次，則在至少出現一顆 3 點的條件下，其點數和為奇數的機率為【　　　　】。

4. 已知空間兩相交直線 L_1：$x-2=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{-2}$，$L_2$：$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{2}$，其交點為 $(x_1，y_1，z_1)$，若兩直線 L_1，L_2 的公垂線為 $\frac{x-x_1}{6}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$，$m，n\in Z$，則序組 $(x_1，y_1，z_1，m，n)=$【　　　　】。

5. 某公司有 A，B，C 三間工廠，各工廠的生產情形如下：A 廠生產 40％的公司產品，產品合格率為 90％；B 廠生產 30％的公司產品，產品合格率為 80％；C 廠生產 30％的公司產品，產品合格率為 70％，試求：

(1)該公司全部產品的合格率為【　　　　】。

(2)若品管員隨機抽樣一產品，發現它是不合格的，則它來自 A 廠的機率為【　　　　】。

6. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，則 $A^{2022}=$【　　　　　】。

7. 坐標空間中有兩條直線 L_1，L_2 與一平面 E，其中直線 L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{-5}$，而 L_2 的參數式為 $\begin{cases}x=1\\ y=1+2t\\ z=1+3t\end{cases}$（$t$ 為實數）。若 L_1 落在 E 上，且 L_2 與 E 不相交，則 E 的方程式為【　　　　　】

8. 一火箭命中目標的機率每發皆為 0.2，若每發皆為獨立事件，則至少要發射【　　　　　】發，才能使至少命中一發之機率大於 0.8。（$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

9. 已知 A 為二階方陣，若 $A\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$，則 $A^5=$【　　　　　】。

10. 已知空間坐標中三點 O（0，0，0）、A（1，2，－2）、B（0，2，1），且集合 $S=\{P \mid \overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，其中 $-1\leq s\leq 1$，$-1\leq t\leq 1\}$，求集合 S 所形成圖形的面積為【　　　　　】。

11. 已知空間中，點 A（2，－1，4），直線 L：$\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$，試求：

（1）A 點關於直線 L 的對稱點坐標為【　　　　　】。

（2）A 點與直線 L 所決定的平面 E 方程式為【　　　　　】。

12. 設空間中兩向量 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ 滿足｜$\overrightarrow{a}$｜＝2，｜$\overrightarrow{b}$｜＝3，且｜3$\overrightarrow{a}$＋2$\overrightarrow{b}$｜＝6，則｜$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$｜＝【　　　　】。

13. 設方程組 $\begin{cases}2x+y-z=5\\ x+2y+az=7\\ 7x+by+cz=31\end{cases}$ 之增廣矩陣經列運算後得到 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&d&1\\0&1&1&3\\0&0&0&0\end{array}\right]$，則 $a+b+c+d=$【　　　　】。

14. 已知坐標空間中直線 L 的方程式為 $\begin{cases}x+ay+bz+11=0\\ 2x-y-3z-1=0\end{cases}$，若其參數式可表示為 $\begin{cases}x=-2+ct\\ y=1-t\\ z=d+3t\end{cases}$，$t$ 為實數，則 $a+b=$【　　　　】。

15. 甲，乙，丙三人參加校內桌球比賽，根據平常練習與經驗判斷，甲、乙、丙進入決賽的機率依序為 $\frac{2}{3}$ 、$\frac{4}{5}$ 、$\frac{3}{4}$，且三人能否進入決賽是獨立事件，則：

(1)三人中至少有兩人進入決賽的機率為【　　　　】。

(2)三人中恰有一人進入決賽的機率為【　　　　】。

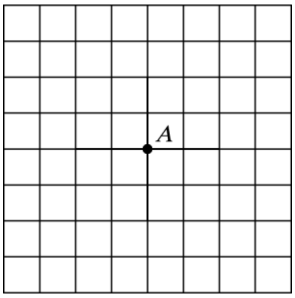
16. 已知直角△ABC，其三邊長為 $\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{AB}=5$，設 P 為△ABC 內部一點，且 P 到 $\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{AB}$ 之距離分別為 x、y、z，試求 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{5}{z}$ 的最小值為【　　　　】。

17. 已知兩歪斜線 L_1：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$，$L_2$：$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$，則：

(1)包含 L_2 且與 L_1 平行的平面 E 方程式為【　　　　】。

(2) L_1 與 L_2 之間的公垂線段長為【　　　　】。

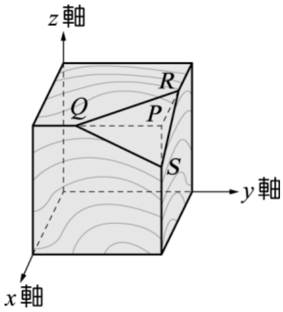
18. 如圖的正方格棋盤，每一回隨機的由一個頂點移動到另一個相鄰的頂點，試求下列各題：



(1)由 A 出發，移動 2 回後回到 A 點的機率為【　　　　】。

(2)由 A 出發，移動 4 回後回到 A 點的機率為【　　　　】。

19. 阿中將一個邊長為 6 公分的正立方體木塊，沿 Q、R、S 三點鋸下四面體 $PQRS$（如圖），剩下的木塊以截面 QRS 為底放在地上，已知 $\overline{PQ}=4$ 公分，$\overline{PR}=x$ 公分，$\overline{PS}=2$ 公分，且已知四面體 $PQRS$ 體積為 $\frac{8}{3}$ 立方公分，則：



(1) x 值為【　　　　】公分。(填充題)

(2)包含 Q、R、S 三點的平面方程式為何？(方程式請以 $ax+by+cz=d$ 呈現，其中 $a>0$)

(3)承上題，此平面方程式與平面 $x+y=1$ 的夾角為【　　　　】。