

範圍：翰林版數(3B)全 班級：_____座號：_____姓名：_____

素養題練習

說明：各位同學，恭喜大家度過高二上的學習階段，迎來了快樂的寒假。

雖然今年寒假只有 21 天，但是如果能好好把握，稍稍複習本學期數(B)的教學內容，相信同學必能提升自身數學能力，能更從容面對下學期的學習。所以，基隆高中數學科研究會為同學準備了一份寒假數學作業，這一份寒假數學作業只有 14 題素養題，但內容涵蓋了高二上學期的所有內容，希望同學在練習的過程中，除能複習到數學相關內容，亦能增加文字閱讀與理解能力。

最後，敬祝各位同學健康平安，新年快樂。

基隆高中數學科研究會

1. 摩爾定律由 Intel 創始人之一戈登·摩爾所提出：積體電路上可容納的電晶體數目，約每隔 2 年便會增加 1 倍。而 Intel 執行長大衛·豪斯則提出：預計每 18 個月會將晶片的效能提高 1 倍。假設豪斯提出的效能提高也是建立在電晶體數目的加倍上，試回答下列問題。

- (1) 依照摩爾的數據預估，現在積體電路上可容納的電晶體數目，約是 30 年前的幾倍？（單選題）
(A)15 倍 (B)20 倍 (C) 2^5 倍 (D) 2^{15} 倍 (E) 2^{20} 倍。
- (2) 依照摩爾與豪斯的預估，經過 30 年後，兩者在相同積體電路上可容納的電晶體數目會相差幾倍？（非選擇題）

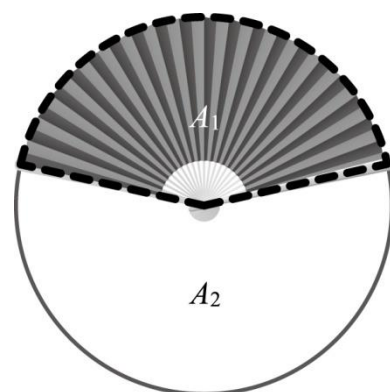
2. 2019 年第 18 號颱風「米塔」在菲律賓東方海面生成，氣象局在 9/28 觀測到的坐標位置為 (132,16)，之後直線移動朝臺灣東北部海面前進，在 9/30 觀測到的坐標位置為(123,22)，然後隨即向右轉，繼續沿直線移動：

- (1) 若米塔颱風朝著觀測方向直線前進，理論上會在臺灣何處登陸？（單選題）
(A)屏東(110,28) (B)宜蘭(114,34) (C)臺北(112,36) (D)臺東(114,28)。
- (2) 在氣象局的嚴密觀測下，10/01 觀測到的坐標位置為(122,27)，問米塔颱風順時鐘轉 _____度。（非選擇題）

3. 小明想設計紙扇來義賣，設計了一個符合最美比例的紙扇如附圖，其規格如下：圓的剩餘面積

(A_2) 與紙扇展開最大時的扇形面積 (A_1) 的比值是黃金比例。(黃金比例： $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$)

- (1) 試問該紙扇可張開的最大角度最接近何者？（單選題）
(A) 100° (B) 110° (C) 120° (D) 130° (E) 140° 。
- (2) 若該紙扇的柄長為 20 公分，黏於柄上的扇紙邊長為 14 公分，試求該紙扇扇紙的面積。（依(1)的選擇作答）（非選擇題）



4. 科學家欲建立潮汐模型，在只考慮月球的引潮力影響下，觀察得到某港口在一天 24 小時海水漲落的水深紀錄，如圖所示：

將其函數化後得到水深函數為 $y = 3\sin \frac{\pi}{6}x + 10$ ，

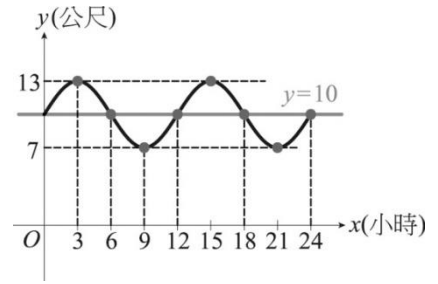
其中 y 為水深（單位：公尺）， x 為時間（單位：小時）。

- (1) 若地球自轉速率加倍，且日地月相對位置等其他條件不變的情況下，一天會變為 12 小時，造成潮汐週期減半，試問下列何者為該日改變後的水深函數？（單選題）

(A) $y = 3\sin \frac{\pi}{6}x + 10$ (B) $y = 3\sin \frac{\pi}{3}x + 10$ (C) $y = 3\sin \frac{\pi}{12}x + 10$ (D) $y = 6\sin \frac{\pi}{6}x + 10$

(E) $y = 6\sin \frac{\pi}{3}x + 10$ 。

- (2) 承上題，若當日想在潮水位低於 10 公尺的時間去該港口觀察潮間帶的生態，請問可以在哪些時間到港口觀察？（非選擇題）



5. 如圖，仙后座是由五顆最亮星組成一個非常獨特的 W 形或 M 形，將仙后座 M 字形兩個側邊往上延伸的交會點，與 M 字形中間那點相連接，往下延伸五倍的距離，即可找到北極星。某晚，小丸子仰望星空看見仙后座，想起老師教導的找尋北極星方法，於是她將星空假設成一個直角坐標系，仙后座的 5 顆星星坐標分別為 $A(-1, -1)$ 、 $B(-2, 1)$ 、 $C(0, 1)$ 、 $D(1, 2)$ 及 $E(3, 2)$ ，則：

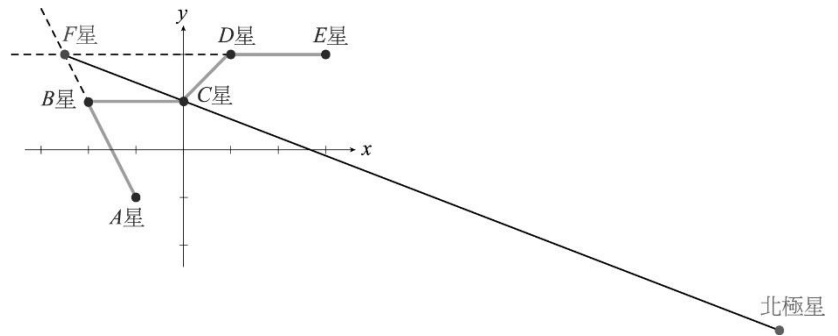
- (1) 將仙后座 M 字形兩個側邊往上延伸的交會點

F 的坐標為（單選題）

(A) $(-2, 2)$ (B) $(2, 0)$ (C) $(-\frac{5}{2}, 2)$

(D) $(2, 3)$ (E) $(3, -2)$ 。

- (2) 北極星的坐標為何？（非選擇題）



6. 小騰在網路上看到一則天津麥田圈的新聞，這個麥田圈的圖案最外圍是一個正方形 Q_1 ，內切一個圓形，再內接一個正方形 Q_2 ，再內切一個圓形，再內接一個正方形 Q_3 ，再內切一個圓形，……，依此類推。

- (1) 請問 Q_2 的邊長是 Q_1 邊長的幾倍？（單選題）

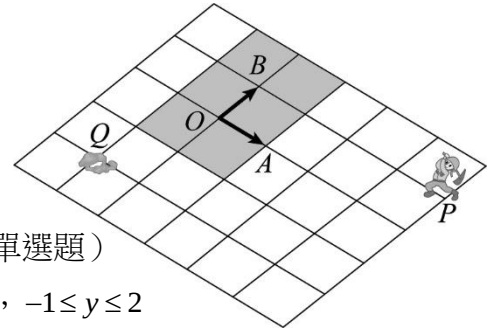
(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍 (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍 (C) $\frac{1}{2}$ 倍 (D) $\frac{1}{3}$ 倍 (E) $\frac{1}{4}$ 倍。

- (2) 當 n 最小為多少時， Q_n 的邊長會小於 Q_1 邊長的 $\frac{1}{100}$ ？（非選擇題）

7. 偽三維（又稱為 2.5D、假 3D）是一種應用在二維畫面中的技術，使得圖像或場景有三維的視覺效果。全平面的地圖是從上往下俯視景物與操作人物，市面上有許多電玩遊戲是採斜角的方向來觀看景物，這種方式可以製作出類似 3D 的畫面，而使用的貼圖技巧卻只有 2D 而已，而且效果並不差，如圖是一斜角地圖的範例：

已知每個小平行四邊形均全等，令圖中 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，

試回答下列問題：



(1) 已知圖中鋪色的樹林區表示 K 點所形成的區域（含邊界），

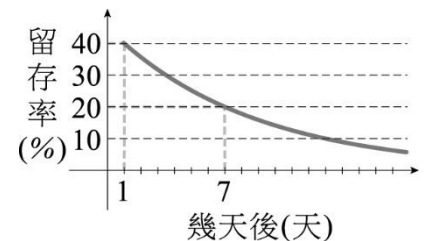
且滿足 $\overrightarrow{OK} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ，下列哪個選項為係數 x 、 y 的範圍？（單選題）

- (A) $0 \leq x \leq 2$ ， $0 \leq y \leq 2$ (B) $0 \leq x \leq 3$ ， $0 \leq y \leq 3$ (C) $-1 \leq x \leq 2$ ， $-1 \leq y \leq 2$
(D) $-1 \leq x \leq 1$ ， $-1 \leq y \leq 2$ (E) $-1 \leq x \leq 2$ ， $-1 \leq y \leq 1$ 。

(2) 已知金礦與礦工分別在圖中的 Q 點與 P 點，滿足 $\overrightarrow{PQ} = m\vec{a} + n\vec{b}$ ，則數對 $(m, n) =$ _____。

(3) 承上題，設 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的長度相等，若礦工沿著格線走捷徑到金礦處採礦，但不能穿越鋪色的樹林區（可以沿著樹林區的邊緣行走），則從 P 到 Q 共有幾種走法？（非選擇題）

8. 某款 App 的新增用戶中，在 x 天後仍啟動該 App 的人數比例 $r(x)\%$ ，叫做 x 天後留存率，而 $r(x)$ 稱為留存函數。一般而言，留存函數 $r(x)$ 的曲線會快速下降，如圖所示，經常被用來檢驗用戶的活躍程度。



此 App 的留存函數 $r(x)$ 滿足 $r(1) = 40$ 及 $r(7) = 20$ （即 1 天與 7 天後的留存率為 40% 與 20%），且留存函數 $r(x)$ 符合 $r(x) = \alpha \times 2^{\beta(1-x)}$ 的數學模型，試回答下列問題：

(1) 試求 $r(13)$ 的值 = _____。（非選擇題）

(2) 留存率有個 40-20-10 法則是指：「1 天、7 天及 31 天後的留存率都不得低於 40%、20% 及 10%」。試判斷該款 App 是否符合 40-20-10 法則？（非選擇題）

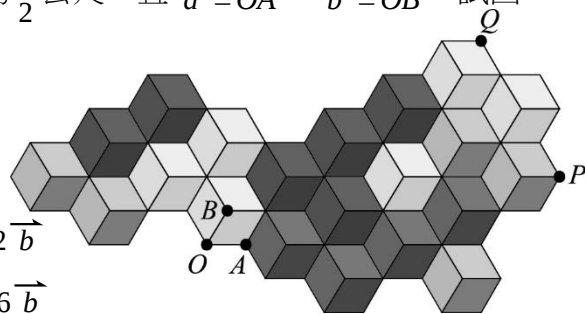
9. 「視星等」是依據肉眼所見明亮程度而定出的星等，除了星體本身發光強度之外，還會受到觀測距離的影響。如果能將星體移到某個與地球等距離的位置，才能客觀比較星體的亮度，天文學家將這個距離設為 32.6 光年，星體在此距離所呈現的亮度就稱為「絕對星等」。已知甲星的視星等為 9，乙星的視星等為 14。兩星發光強度相同，且絕對星等與發光強度密切相關。

(1) 根據上文，若已知甲星的絕對星等為 $M_{\text{甲}}$ ，則乙星的絕對星等應為？（單選題）

- (A) $0.1M_{\text{甲}}$ (B) $M_{\text{甲}}$ (C) $10M_{\text{甲}}$ (D) $100M_{\text{甲}}$ (E) $1000M_{\text{甲}}$ 。

(2) 已知視星等與絕對星等滿足 $M = m + 5 - 5\log d$ ，其中 M 為絕對星等， m 為視星等， d 為星體與地球的距離，則乙星與地球的距離是甲星與地球距離的幾倍？（非選擇題）

10. 某品牌推出以「音樂蜂巢」為設計理念的無線揚聲器系統，具有改善室內空間聲音折射和殘響的功能，其喇叭以模組化系統運作、六邊形方塊為基礎。若某人的家中欲以該品牌的無線揚聲器系統組合於客廳的牆面，如圖所示，令每個小正六邊形的邊長為 $\frac{1}{2}$ 公尺，且 $\vec{a} = \vec{OA}$ ， $\vec{b} = \vec{OB}$ ，試回答下列問題：



- (1) 若將 $\vec{OP}$ 、 $\vec{OQ}$ 表示成 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的線性組合，

則下列選項何者正確？（單選題）

- (A) $\begin{cases} \vec{OP} = \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{OQ} = 3\vec{a} + \vec{b} \end{cases}$ (B) $\begin{cases} \vec{OP} = \vec{a} + 3\vec{b} \\ \vec{OQ} = -2\vec{a} + 4\vec{b} \end{cases}$ (C) $\begin{cases} \vec{OP} = 8\vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{OQ} = 4\vec{a} - 6\vec{b} \end{cases}$
 (D) $\begin{cases} \vec{OP} = 8\vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{OQ} = 4\vec{a} + 6\vec{b} \end{cases}$ (E) $\begin{cases} \vec{OP} = -8\vec{a} - 2\vec{b} \\ \vec{OQ} = -4\vec{a} - 6\vec{b} \end{cases}$ 。

- (2) 已知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \frac{1}{2}$ ，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。（非選擇題）

- (3) 求 $\vec{OP}$ 與 $\vec{OQ}$ 的長度。（非選擇題） (4) 求此人客廳的牆面高度最少要幾公尺？（非選擇題）

11. 天文學以「視星等」來描述地球上肉眼所見星體的相對明亮程度，此概念最早是由古希臘天文學家依巴谷制定的，他把自己編制的星表中的 1022 顆恆星按照亮度劃分為 6 個等級，天上最亮星為 1 等星，人眼能見的最暗星為 6 等星。1850 年則由英國天文學家普森測量並確認 1 等星比 6 等星亮 100 倍。

- (1) 已知每個星等間的亮度都相差一個固定倍數，請問 1 等星的亮度是 2 等星亮度的幾倍？（小數點後第三位四捨五入）（單選題）

(A) 1.58 倍 (B) 1.99 倍 (C) 2.51 倍 (D) 3.16 倍 (E) 3.98 倍。

- (2) 承上題，當時 1~6 的星等已不足以描述所有天體的亮度，天文學家將原有的等級延展，引入了「負星等」的概念，並沿用至今。已知太陽的視星等是 -26.74 ，滿月的平均視星等是 -12.74 ，請問太陽的亮度約為月球亮度的幾倍？（四捨五入至整數位）（非選擇題）

12. 音樂裡的一個音，音樂家習慣用音高 p 來表示，它是一個正整數；而物理學家卻常用頻率 f (Hz) 來形容這個音。事實上，一個音的音高 p 與該音的頻率 f 有如下的轉換公式：

$$f = 440 \times 2^{\frac{p-69}{12}}。$$

根據以上資訊，試回答下列問題：

- (1) 人耳的聽力極限在 20Hz~20000Hz 之間，下列音高 p 值的選項中，哪個值所對應的音最接近人耳聽力的上限？（單選題） (A) $p=129$ (B) $p=135$ (C) $p=141$ (D) $p=147$ (E) $p=153$ 。

- (2) 已知鋼琴從左至右有 88 個鍵，這些鍵所彈出來的音之音高恰為 21, 22, ..., 108 等整數值，試求鋼琴最左鍵所彈出的音之頻率 (Hz)。（精確至小數點以下第一位）（非選擇題）

- (3) 將一個音的音高 p 表為其頻率 f (Hz) 的公式。（非選擇題）

13. 環境受到全球塑膠廢棄物影響的程度日益嚴重。根據「世界經濟論壇」(World Economic Forum)的估計，每年至少有超過 800 萬噸的塑膠被排放至海洋中，相當於每分鐘便有一輛垃圾車的塑膠被倒入海洋。按此趨勢發展，到了 2050 年，海洋中的塑膠廢物總重可能超過魚類。針對這一危機，聯合國在 2017 年 6 月舉辦的海洋會議上確認將減少海洋塑膠廢棄物視為當務之急，各國亦積極響應，開始採取相關行動。

我國自 2002 年起推動購物用塑膠袋減量工作(限塑政策)，規定量販店、超級市場、連鎖便利商店等 7 大類約 2 萬家商店不得免費提供購物用塑膠袋，以養成民眾自備購物袋的習慣。推動迄今，每年減少約 20 億個塑膠袋的使用。2018 年起政府加大限塑範圍，預計每年可再進一步減少 15 億個塑膠袋的使用，共同致力於保護海洋與生態環境。

擴大管制的 3 項措施：

一、擴大管制對象：新增藥粧／美粧／藥局、醫療器材行、3C 零售、書店／文具店、洗衣店、飲料店、西點麵包店等 7 類，不得免費提供購物用塑膠袋，使管制對象將從現行 7 大類 2 萬家擴大至 14 大類 10 萬家。

二、取消厚度限制：取消現行規定管制場所提供民眾購買的購物用塑膠袋厚度須達 0.06mm 限制，購物用塑膠袋不論厚薄皆不得免費提供給民眾。

三、兩袋合一：垃圾費隨袋徵收地區之環保局可規定轄內量販店、超市、連鎖便利商店等 3 類管制對象，僅能提供專用垃圾袋及購物用塑膠袋合一的「兩用袋」。

行政院環保署早自 2002 年開始推動限塑政策；2011 年起更規定連鎖速食店、便利商店及飲料店提供自備飲料杯的消費優惠，目前九成以上的連鎖飲料店均採現金優惠。當大多數人都能儘量不製造塑膠垃圾，環境才有機會免受塑膠污染危害。

請回答下列問題：

- (1) 綠色和平主張，2040 年前減產至少 75% 的塑膠量，是守住全球控制升溫於攝氏 1.5 度內的必要行動，否則全球極端氣候的狀況會快速加劇。若某國家以 2020 年的塑膠使用量為基準，接下來每一年的塑膠使用量固定減少 $r\%$ (r 為正整數)，直到 2040 年達到減少 75% 以上的目標，求 r 的最小值為？($\log 2 \approx 0.30$ 、 $\log 3 \approx 0.48$ 、 $\log 9 \approx 0.95$ 、 $\log 9.3 \approx 0.97$) (非選擇題)

- (2) 該國家首都於 2020 年月均溫 (y 度) 可表為週期函數 $y = a \sin\left(bt - \frac{2}{3}\pi\right) + c$ ，其中 t 為該年度月

份，且滿足 $0 \leq bt - \frac{2}{3}\pi < 2\pi$ 。已知於 2020 年首都七月為整年最高月均溫 27 度，一月為整年最低

月均溫 15 度，試回答下列問題：(非選擇題)

①數對 $(a, b, c) =$ _____。

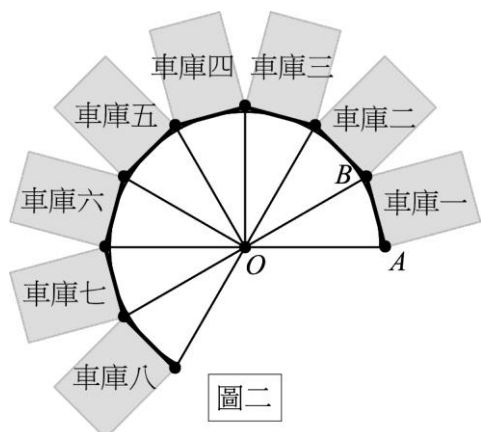
②若該城市於 2040 年月均溫升溫 1.5 度，求 2040 年的月均溫週期函數為_____。

14. 扇形車庫（如圖一）又稱為圓形機車庫，是鐵路機車使用的車庫。由於蒸汽火車頭不方便倒車行駛的機制，所以在中央設置一座可以 360 度旋轉的調車轉盤，以供火車頭的迴轉與調度。調車轉盤、輻射狀鐵軌與弧形車庫宛如對比一把展開的扇子，這樣的建築設計別有特色，充分展現鐵道文化之美。

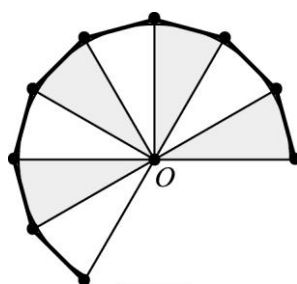


圖一

某富豪欲在家中的空地蓋車庫，仿照彰化扇形車庫建造。已知富豪共有八輛車，在建地上以半徑 5 公尺畫一圓心角為 240° 的扇形，在其扇形外建立八個車庫（如圖二）。



圖二



圖三

已知各車庫的大小均相等，且寬度為扇形所對應之圓外切正 n 邊形的邊長，試回答下列問題：

- (1) 若扇形圓心角 240° ，則其弧度為何？（單選題）

(A) $\frac{5\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{4}$ (C) $\frac{5\pi}{3}$ (D) $\frac{4\pi}{3}$ (E) $\frac{2\pi}{3}$ 。

- (2) 已知 $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ ，則車庫的寬度 $\overline{AB}$ = _____ 公尺。（非選擇題）

- (3) 將車庫前的扇形區域分成單、雙號，例如：車庫一前對應的扇形為一號。若想將扇形單號區域上漆以方便停車時辨識（如圖三中的鋪色部分），已知某品牌的油漆一罐能塗 4 平方公尺的面積，則將單號區域均上色需要該油漆幾罐？（無條件進位取至整數位，已知 $\pi \approx 3.14$ ）（非選擇題）