

範圍：翰林版 3-3 面積與二階行列式

班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____

1. 已知 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(3, 1)$ ， $B(2, 4)$ ， $C(5, -2)$ ，且 O 為 $\triangle ABC$ 的外心點，則(1) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____。(2) $\triangle ABC$ 的面積為_____。Sol: (1) $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ ， $\overrightarrow{AC} = (2, -3)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{1}{2} [(-1)^2 + 3^2] = 5$$

$$(2) \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-3| = \frac{3}{2}$$

2. $\triangle ABC$ 中，若 $|\overrightarrow{AB}| = 2$ ， $|\overrightarrow{AC}| = 3$ ， $\triangle ABC$ 之面積為 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____。Sol: $\because \triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \times 3^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \Rightarrow 27 = 4 \times 9 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2 \Rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2 = 9$$

故 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm 3$ 3. 已知 a, b 為整數且行列式 $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4$ ，則絕對值 $|a+b| =$ _____。

$$\text{Sol: } \begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow 35 - ab = 4 \Rightarrow ab = 31 \quad \therefore |a+b| = 32$$

a	31	1	-31	-1
b	1	31	-1	-31

4. 行列式 $\begin{vmatrix} 2996 & 2997 \\ 2998 & 2999 \end{vmatrix} =$ _____。

$$\text{Sol: } \begin{vmatrix} 2996 & 2997 \\ 2998 & 2999 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \times (-1)} \begin{vmatrix} 2996 & 2997 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(2996 - 2997) = -2$$

5. 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$ ， $\begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} = 4$ ，則 $\begin{vmatrix} 4a+3x & 4b+3y \\ 5c & 5d \end{vmatrix} =$ _____。

$$\text{Sol: } \begin{vmatrix} 4a+3x & 4b+3y \\ 5c & 5d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a & 4b \\ 5c & 5d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3x & 3y \\ 5c & 5d \end{vmatrix} = 4 \times 5 \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 3 \times 5 \times \begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} = 20 \times 3 + 15 \times 4 = 120$$

6. () 下列哪些選項是正確的？(A) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c+99a \\ b & d+99b \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e+ka & f+kd \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c-e & d-f \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & -2a-b \\ c+d & -2c-d \end{vmatrix}$

(E) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$ 。【多選題】

Sol: (A) $\times$: $-\begin{vmatrix} a & c+99a \\ b & d+99b \end{vmatrix} = -\left(\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 99a \\ b & 99b \end{vmatrix}\right) = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(B) $\times$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-k)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(C) $\circ$: $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-k)} + \begin{vmatrix} e+ka & f+kb \\ a & b \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-k)}$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -e & -f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c-e & d-f \end{vmatrix}$$

(D) $\circ$: 右式 = $\begin{vmatrix} a+b & -2a-b \\ c+d & -2c-d \end{vmatrix} \xrightarrow{\times 2} = \begin{vmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \text{左式}$

(E) $\circ$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$ 故選(C)(D)(E)

7. 設 $a \in \mathbb{R}$ ，若方程組 $\begin{cases} x+2y=ax \\ 3x+2y=ay \end{cases}$ 有異於 $(0, 0)$ 的解，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Sol: $\begin{cases} (1-a)x+2y=0 \\ 3x+(2-a)y=0 \end{cases}$ 有異於 $(0, 0)$ 的解 $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-a & 2 \\ 3 & 2-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-a)(2-a) - 6 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \quad \therefore a = 4 \text{ 或 } -1$

8. 設平面上兩向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 所展成平行四邊形的面積為 8，則由兩向量 $4\vec{a} + 3\vec{b}$ 與 $-5\vec{a} + 3\vec{b}$ 所張成平行四邊形的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

Sol: 設 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 的絕對值 = 8

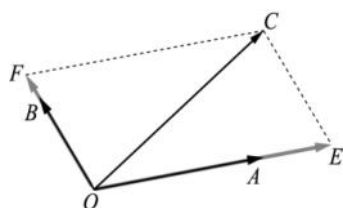
$\therefore 4\vec{a} + 3\vec{b} = 4(a_1, a_2) + 3(b_1, b_2) = (4a_1 + 3b_1, 4a_2 + 3b_2)$

$-5\vec{a} + 3\vec{b} = -5(a_1, a_2) + 3(b_1, b_2) = (-5a_1 + 3b_1, -5a_2 + 3b_2)$

故由 $4\vec{a} + 3\vec{b}$ 與 $-5\vec{a} + 3\vec{b}$ 所張成平行四邊形的面積為

11. 如圖， $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ ， $\overrightarrow{OE} = x \overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{OF} = y \overrightarrow{b}$ ，且 $x \overrightarrow{a} + y \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ ，

$\overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面積為 5， $\overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 6， $\overrightarrow{b}$ ， $\overrightarrow{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 7，則 $y =$ _____。



Sol: 由克拉瑪公式的幾何意義知

$$x = \frac{\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b} \text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \text{ 所張成的平行四邊形面積}} = \frac{7}{5}$$

同理

$$y = \frac{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \text{ 所張成的平行四邊形面積}} = \frac{6}{5}$$

請將答案填入下列表格中

1(1)	1(2)	2	3	4	5
5	$\frac{3}{2}$	±3	32	-2	216
6	7	8	9	10	11
(C)(D)(E)	4 或 -1	216	(C)(D)	(B)	$\frac{6}{5}$