

日期：111/01/05

範圍：複習講義第十三單元

班級_____座號_____姓名_____

一、單選題：(一小題 10 分)

1. () 下列二階方陣，哪一個沒有乘法反方陣？ (A) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \log 4 & \log 2 \\ \log 2 & 1 \end{bmatrix}$
- (C) $\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{5}-2 \\ \sqrt{5}+2 & 1 \end{bmatrix}$

解答 E**解析** 設方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且 $\Delta = ad - bc$ ，若 $\Delta = 0$ ，則 A^{-1} 不存在

2. () 若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，若 $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ， $A^5 = \begin{bmatrix} 7 & -25 \\ 5 & -18 \end{bmatrix}$ ，則 $a - b + c - d$ 的值為何？
- (A) -3 (B) -5 (C) -7 (D) 7 (E) 11

解答 E

解析 因為 $A^2 \times A^3 = A^5 \Rightarrow A^3 = (A^2)^{-1} \times A^5 = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -25 \\ 5 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ ，

又 $A^2 \times A = A^3 \Rightarrow A = (A^2)^{-1} \times A^3 = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ，

所以 $a - b + c - d = 2 - (-5) + 1 - (-3) = 11$

二、多選題：(一小題 10 分)

3. () 設 A 、 B 、 C 為二階方陣， I_2 是二階單位矩陣， O_2 是二階零方陣，則下列敘述哪些是正確的？ (A) $A^5 = A^2 \times A^3$ (B) $(AB)^2 = A^2 \times B^2$ (C) 若 $AB = AC$ ，則 $B = C$
- (D) $(A + I_2)^2 = A^2 + 2A + I_2$ (E) 若 A^{-1} 、 B^{-1} 存在，則 $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

解答 ADE

解析 (A) ○ (B) ×： $(AB)^2 = (AB)(AB)$ (C) ×：反例：可取 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ，

其中 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(D) ○ (E) ○： $(AB)(AB)^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} \times A \times B \times (AB)^{-1} = A^{-1} \Rightarrow B^{-1} \times B \times (AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$ ，所以 $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

三、填充題：(一小題 10 分)

4. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，則

(1) $A^{-1} =$ _____。

(2) 若方陣 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ，則 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$ _____。

解答 (1) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(2) 120

解析 (1) 令 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ ，所以 $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 。

(2) 因為 $AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = A^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ ，

所以 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 64 + 16 + 36 + 4 = 120$ 。

5. 設 a, b, c, d, e, x, y, z 皆為實數，考慮矩陣相乘： $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -4 & 6 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x & 7 \\ 0 & y & 7 \\ -11 & z & 23 \end{bmatrix}$ ，則

(1) $c =$ _____。(2) $y =$ _____。(化成最簡分數)

解答 7, $\frac{7}{2}$

解析 根據矩陣乘法的定義，得 $\begin{cases} -3c - 4d = 0 \cdots \cdots (i) \\ 5c + 6d = y \cdots \cdots (ii) \\ 7c + de = 7 \cdots \cdots (iii) \\ 7 + 2e = 23 \cdots \cdots (iv) \end{cases}$ ，

由(iv)解得 $e = 8$ ，代入(iii)後，再與(i)聯立，得 $c = 7$ ， $d = -\frac{21}{4}$ 。

代入(ii)，得 $y = 5 \times 7 + 6 \times (-\frac{21}{4}) = \frac{7}{2}$ 。

6. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$ ，其中 a, b 為實數。若 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ，則

(1) $a + b$ 的值為 _____。

(2) 方程組 $\begin{cases} ax - 2y = 2 \\ 3x + by = 4 \end{cases}$ 的解 $(x, y) =$ _____。

解答 (1) -6 (2) (6, 2)

解析 (1) 令 $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 + 6 = -1$ ，

所以 $(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ ，即 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ ，

所以 $a = 1$ ， $b = -7 \Rightarrow a + b = 1 + (-7) = -6$ 。

(2) 由題意知： $\begin{bmatrix} a & -2 \\ 3 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，其中 $A = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 3 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，

即數對 $(x, y) = (6, 2)$ 。

7. 若 A 是二階方陣，已知 $A \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，則 $A =$ _____。

解答 $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

解析 由題意知 $A \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ，

令 $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，則 $B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ，

$\therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 。

※答案欄

1.	2.	3.	4. (1)	4. (2)
5. (1)	5. (2)	6. (1)	6. (2)	7.