國立基隆高中　110 學年度 第一學期　高三數甲(A)　數學科晨考

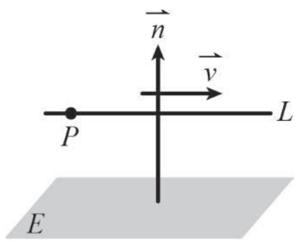
範圍：複習-單元13　日期:110/12/22

一、單選題

1. (　　)設直線L的方程式為$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$，則下列哪一個平面與$L$平行。
(A) $2x-y+z=1$　(B) $x+y-z=2$　(C) $3x-y+2z=1$　(D) $3x+2y+z=2$　(E) $x-3y+z=1$

解答　B

解析　若$L // E$，則



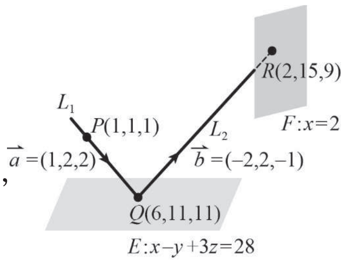
(I) $\vec{v}\perp\vec{n}$。
(II) L上的定點P不在E上。
令L之方向向量$\vec{v}=(3,-1,2)$，定點$P(2,-1,1)$。

(A)╳：$\vec{n_1}=(2,-1,1)$，$\vec{n_1}\cdot\vec{v}\neq 0$
(B)○：$\vec{n_2}=(1,1,-1)$，$\vec{n_2}\cdot\vec{v}=3-1-2=0$。點$P$代入平面中，$2-1-1\neq 2$，所以$L // E$
(C)╳：$\vec{n_3}=(3,-1,2)$，$\vec{n_3}\cdot\vec{v}\neq 0$
(D)╳：$\vec{n_4}=(3,2,1)$，$\vec{n_4}\cdot\vec{v}\neq 0$
(E)╳：$\vec{n_5}=(1,-3,1)$，$\vec{n_5}\cdot\vec{v}\neq 0$

2. (　　)坐標空間中一質點自點$P(1,1,1)$沿著方向$\vec{a}=(1,2,2)$等速直線前進，經過 5 秒後剛好到達平面$x-y+3z=28$上，立即轉向沿著方向$\vec{b}=(-2,2,-1)$依同樣的速率等速直線前進。請問再經過幾秒此質點會剛好到達平面$x=2$上？　(A)1秒　(B)2秒　(C)3秒　(D)4秒　(E)永遠不會到達

解答　B

解析　如圖，



L_1的方程式為$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$，
設L_1與E之交點為Q，則令$Q(t+1,2t+1,2t+1)$代入平面E中，
所以$t+1-2t-1+6t+3=28\Rightarrow 5t=25$，$t=5$，即$Q(6,11,11)$。
又質點反射沿著$\vec{b}$前進，則L_2之方程式為$\frac{x-6}{-2}=\frac{y-11}{2}=\frac{z-11}{-1}$，
設L_2與平面F：$x=2$的交點為R，令$R(-2k+6,2k+11,-k+11)$代入F中，
所以$-2k+6=2\Rightarrow k=2$，即$R(2,15,9)$，
又$\overline{PQ}=\sqrt{(6-1)^2+(11-1)^2+(11-1)^2}=\sqrt{225}=15$，所以質點的速率為$\frac{15}{5}=3$，
又$\overline{QR}=\sqrt{(2-6)^2+(15-11)^2+(9-11)^2}=\sqrt{36}=6$，
所以Q點到平面F需要花$\frac{6}{3}=2$（秒）

二、多選題

3. (　　) 坐標空間中，設直線 L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1}$，平面 E_1：$2x-3y-z=0$，平面 E_2：$x+y-z=0$。試選出正確的選項。　(A)點$(3,0,-1)$在直線 L 上　(B)點$(1,2,3)$在平面 E_1 上　(C)直線 L 與平面 E_1 垂直　(D)直線 L 在平面 E_2 上　(E)平面 E_1 與 E_2 交於一直線　【107 學測】

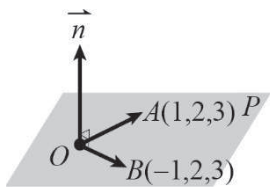
解答　CE

解析　(A)將點$(3,0,-1)$代入 L，得 $\frac{3-1}{2}\neq\frac{0-2}{-3}\neq\frac{-1}{-1}$（不合），所以不在 L 上　(B)將點$(1,2,3)$代入 E_1，得 $2\times1-3\times2-3\neq0$（不合），所以不在 E_1 上　(C)因為直線 L 的方向向量$(2,-3,-1)$與平面 E_1 的法向量$(2,-3,-1)$平行，所以直線 L 與平面 E_1 垂直　(D)將直線 L 的參數式 $x=1+2t$，$y=2-3t$，$z=-t$，代入平面 E_2，得$(1+2t)+(2-3t)-(-t)=0\Rightarrow3=0$（不合），因為此方程式的 t 無解，所以直線 L 與平面 E_2 平行　(E)因為平面 E_1 的法向量$(2,-3,-1)$與平面 E_2 法向量$(1,1,-1)$不平行，所以兩平面不平行。因此，兩平面交於一直線

4. (　　) 坐標空間中有一平面 P 過$(0,0,0)$、$(1,2,3)$及$(-1,2,3)$三點。試選出正確的選項。　(A)向量$(0,3,2)$與平面 P 垂直　(B)平面 P 與 xy 平面垂直　(C)點$(0,4,6)$在平面 P 上　(D)平面 P 包含 x 軸　(E)點$(1,1,1)$到平面 P 的距離是 1　【108 學測】

解答　CD

解析　令 $O(0,0,0)$，$A(1,2,3)$，$B(-1,2,3)$，



則 $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,2,3)$，

所以法向量 $\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\2&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\3&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\-1&2\end{vmatrix}\right)=(0,-6,4)$，

令 $\vec{n}=(0,3,-2)$，所以平面 P 的方程式為 $3y-2z=0$。

(A)╳：向量$(0,3,2)$不平行 $\vec{n}$，所以向量$(0,3,2)$不垂直平面 P

(B)╳：xy 平面的法向量 $\vec{n'}=(0,0,1)$，因為 $\vec{n}\cdot\vec{n'}=-2\neq0$，所以兩平面不垂直

(C)○：$(0,4,6)$代入平面 P 中，$12-12=0$（合），所以$(0,4,6)$在平面 P 上

(D)○：x 軸的參數式 $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$ 代入平面 P 中（合），所以平面 P 包含 x 軸

(E)╳：令 $C(1,1,1)$，所以 $d(C,P)=\frac{|3-2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}\neq1$

三、填充題

5. 在坐標空間中，設 O 為原點，且點 P 為三平面 $x-3y-5z=0$、$x-3y+2z=0$、$x+y=t$ 的交點，其中 $t>0$。若 $\overline{OP}=10$，則 $t=$____________。（化成最簡根式）

解答　$4\sqrt{10}$

解析　$\begin{cases}x-3y-5z=0\\x-3y+2z=0\end{cases}\Rightarrow z=0$，

所以 $x-3y=0$……(i)，又 $x+y=t$……(ii)，

所以 $y=\frac{t}{4}$，$x=\frac{3}{4}t$，得 $P(\frac{3}{4}t,\frac{t}{4},0)$，

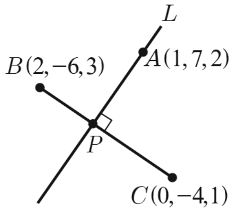
所以 $\overline{OP}=\sqrt{(\frac{3}{4}t)^2+(\frac{t}{4})^2}=\sqrt{\frac{10t^2}{16}}=10$

$\Rightarrow\frac{10}{16}t^2=100\Rightarrow t^2=160\Rightarrow t=4\sqrt{10}$（因為 $t>0$）。

6. 空間中有三點 $A(1,7,2)$、$B(2,-6,3)$、$C(0,-4,1)$。若直線 L 通過 A 點並與直線 BC 相交且垂直，則 L 和直線 BC 的交點坐標為________________。【109 學測】

解答 $P(-3,-1,-2)$

解析 $\overrightarrow{BC}=(-2,2,-2)=2(-1,1,-1)$



取 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方向向量 $\overrightarrow{v}=(-1,1,-1)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BC}$：$\begin{cases} x=2-t \\ y=-6+t, t\in \mathrm{R} \\ z=3-t \end{cases}$

設交點 $P(2-t,-6+t,3-t)$，作 $\overrightarrow{AP}=(1-t,-13+t,1-t)$

$\because L\perp \overleftrightarrow{BC}$，$\therefore \overrightarrow{AP}\perp \overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\Rightarrow (1-t,-13+t,1-t)\cdot(-2,2,-2)=0$

$\Rightarrow -2(1-t)+2(-13+t)-2(1-t)=0$

$\Rightarrow 6t-30=0$，$\therefore t=5$，即 $P(-3,-1,-2)$

7. 坐標空間中有兩條直線 L_1, L_2 與一平面 E，其中直線 $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{-5}$，而 L_2 的參數式為 $\begin{cases} x=1 \\ y=1+2t \\ z=1+3t \end{cases}$（$t$ 為實數）。若 L_1 落在 E 上，且 L_2 與 E 不相交，則 E 的方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿。【109 學測】

解答 $x-6y+4z=0$

解析 $L_1\Rightarrow$ 方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(2,-3,-5)$，定點 $O(0,0,0)$

$L_2\Rightarrow$ 方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(0,2,3)$

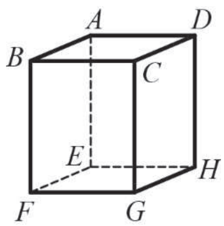
令平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n_E}$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_E}//\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\left(\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}\right)=(1,-6,4)$

$\Rightarrow E:1\times(x-0)+(-6)\times(y-0)+4\times(z-0)=0$

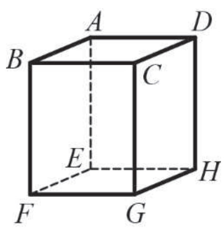
即 $x-6y+4z=0$

8. 如圖所示，$ABCD-EFGH$ 為一長方體。若平面 BDG 上一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AE}$，則實數 $a=$＿＿＿＿＿＿。



解答 $\dfrac{4}{3}$

解析 設長方體 $ABCD-EFGH$ 的邊長，$\overline{CB}=t$，$\overline{CD}=k$，$\overline{CG}=m$，



令 $C(0,0,0)$，$B(t,0,0)$，$D(0,k,0)$，$G(0,0,m)$，則 $A(t,k,0)$，$E(t,k,m)$，

又通過 B、D、G 三點的平面方程式為 $\dfrac{x}{t}+\dfrac{y}{k}+\dfrac{z}{m}=1$（截距式），

令 $P(x,y,z)$，因為 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\times\overrightarrow{AE}$，

$\Rightarrow (x-t,y-k,z)=\frac{1}{3}(0,-k,0)+2(-t,0,0)+a(0,0,m)=(-2t,-\frac{1}{3}k,am)$，

所以 $x=-t$，$y=\frac{2}{3}k$，$z=ma$，因為 P 在平面 BDG 上，

$P(-t,\frac{2}{3}k,ma)$ 代入方程式中，則 $-1+\frac{2}{3}+a=1\Rightarrow a=\frac{4}{3}$。

四、計算題

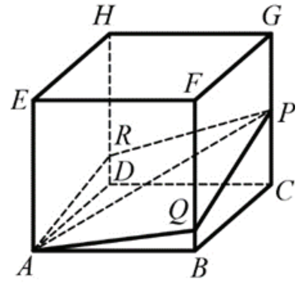
9. 一個邊長為 1 的正立方體 $ABCD-EFGH$，點 P 為稜邊 $\overline{CG}$ 的中點，點 Q、R 分別在稜邊 $\overline{BF}$、$\overline{DH}$ 上，且 A、Q、P、R 為一平行四邊形的四個頂點，如圖所示。今設定坐標系，使得 D、A、C、H 的坐標分別為(0,0,0)、(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)，且 $\overline{BQ}=t$，試回答下列問題。【109 數甲】

(1)試求點 P 的坐標。

(2)試求向量 $\overrightarrow{AR}$（以 t 的式子來表示）。

(3)試證明四角錐 $G-AQPR$ 的體積是一個定值（與 t 無關），並求此定值。

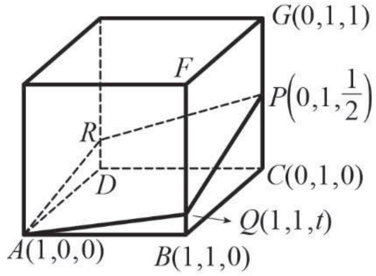
(4)當 $t=\frac{1}{4}$ 時，求點 G 到平行四邊形 $AQPR$ 所在平面的距離。



解答　(1) $(0,1,\frac{1}{2})$ (2) $(-1,0,\frac{1}{2}-t)$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

解析

(1)點 $P(0,1,\frac{1}{2})$。



(2)因為 $\overline{BQ}=t$，所以 $Q(1,1,t)$，又 $AQPR$ 為平行四邊形，

所以 $R(1+0-1,0+1-1,0+\frac{1}{2}-t)=(0,0,\frac{1}{2}-t)$，故 $\overrightarrow{AR}=(-1,0,\frac{1}{2}-t)$。

(3) $\overrightarrow{PG}=(0,0,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{AR}=(-1,0,\frac{1}{2}-t)$，$\overrightarrow{AQ}=(0,1,t)$，

令 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}=(\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}-t\\ 1 & t\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{1}{2}-t & -1\\ t & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix})=(t-\frac{1}{2},t,-1)$，

又 $\overrightarrow{PG}$ 在 $\overrightarrow{n}$ 的正射影長 $h=\frac{|\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t^2+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2t^2-t+\frac{5}{4}}}$，

所以錐體 $G-AQPR$ 體積為 $\frac{1}{3}\times$底面積 $\times$ 高

$=\frac{1}{3}\times|\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}|\times h=\frac{1}{3}\times\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t^2+1}\times\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t^2+1}}=\frac{1}{6}$（與 t 值無關）。

(4)當 $t=\frac{1}{4}$ 時，平面 $AQPR$ 的法向量 $\overrightarrow{n'}//(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-1)$，

令 $\overrightarrow{n'}=(1,-1,4)$，所以 $AQPR$ 方程式為 $x-y+4z=1$，

故 G 點到平面的距離 $d=\frac{|0-1+4-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$。

五、　混合題

10.已知兩平面 E_1：$x+3y-z=-4$，E_2：$2x+5y+z=-1$ 之交線 L 的比例式為 $\frac{x-1}{8}=\frac{y-c}{a}=\frac{z-d}{b}$，試回答下列問題：

(1)試求 $a+b+c+d$ 之值？（單選題）

(A)3　(B)2　(C)5　(D)-2　(E)-3。

(2)承上題，包含 L 且過點 $P(3,2,1)$的平面方程式為何？（非選擇題）

解答　(1)E　(2)$x+y+5z=10$

解析　(1) L：$\begin{cases} x+3y-z=-4\cdots\cdots E_1 \\ 2x+5y+z=-1\cdots\cdots E_2 \end{cases}$，

E_1 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,3,-1)$，$E_2$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(2,5,1)$，

設 L 之方向向量為 $\overrightarrow{v}$，則 $\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{n_1}$ 且 $\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{n_2}$，

所以 $\overrightarrow{v}//(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})=(\begin{vmatrix}3 & -1\\5 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{vmatrix})\Rightarrow\overrightarrow{v}//(8,-3,-1)$，

又 $\overrightarrow{v}//(8,a,b)$，所以 $a=-3$，$b=-1$，即 L：$\frac{x-1}{8}=\frac{y-c}{-3}=\frac{z-d}{-1}$，

又直線 L 通過點$(1,c,d)$代入 E_1、E_2 的方程式中，

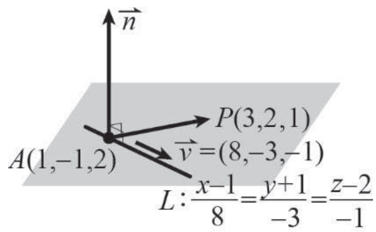
所以 $\begin{cases}1+3c-d=-4\\2+5c+d=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3c-d=-5\\5c+d=-3\end{cases}$，$c=-1$，$d=2$，

則 $a+b+c+d=-3-1-1+2=-3$。

(2)　如圖，$A(1,-1,2)$，$\overrightarrow{AP}=(2,3,-1)$，$\overrightarrow{v}=(8,-3,-1)$，

設所求平面的法向量 $\overrightarrow{n}$，則 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AP}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v}$，

所以 $\overrightarrow{n}//\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{v}=(\begin{vmatrix}3 & -1\\-3 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 2\\-1 & 8\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 3\\8 & -3\end{vmatrix})\Rightarrow\overrightarrow{n}//(-6,-6,-30)$，



令 $\overrightarrow{n}=(1,1,5)$且通過點 $A(1,-1,2)$，故所求的平面方程式為 $x+y+5z=10$。