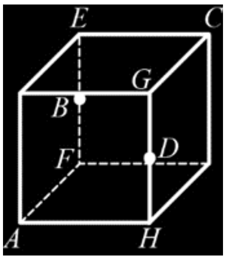
國立基隆高中　110 學年度 第一學期　高三數甲(A)　數學科晨考

範圍：複習-單元12　　　　日期:110/12/15

一、單選題

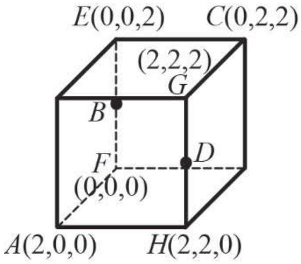
1.（　　）如圖，一個邊長為 2 的正立方體，B、D 分別為 $\overline{EF}$，$\overline{GH}$ 的中點，則四邊形 $ABCD$ 的面積為何？



(A) $\sqrt{6}$　(B) $2\sqrt{6}$　(C) $2\sqrt{2}$　(D) $2\sqrt{3}$　(E) $4\sqrt{3}$

解答　B

解析　將圖形坐標化：



$A(2,0,0)$、$B(0,0,1)$、$C(0,2,2)$、$D(2,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,1)$，又 $ABCD$ 為平行四邊形，

且 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\left(\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&0\\0&2\end{vmatrix}\right)=(-2,2,-4)$，

所以平行四邊形面積 $=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$

2.（　　）令 $A(5,0,12)$、$B(-5,0,12)$為坐標空間中之兩點，且令 P 為 xy 平面上滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$的點。請問下列哪一個選項中的點可能為 P？　(A)(5,0,0)　(B)(5,5,0)　(C)(0,12,0)　(D)(0,0,0)　(E)(0,0,24)

解答　D

解析　因為 P 在 xy 平面上，所以令 $P(x,y,0)$，

又 $\overline{PA}=13\Rightarrow\sqrt{(x-5)^2+y^2+(-12)^2}=13$

$\Rightarrow x^2+y^2-10x+169=169\Rightarrow x^2+y^2-10x=0\cdots\cdots$(i)，

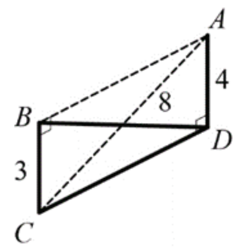
$\overline{PB}=13\Rightarrow\sqrt{(x+5)^2+y^2+(-12)^2}=13$

$\Rightarrow x^2+y^2+10x+169=169\Rightarrow x^2+y^2+10x=0\cdots\cdots$(ii)，

(ii) − (i)得 $20x=0$，所以 $x=0$ 代入(i)得 $y=0$，$P(0,0,0)$

二、填充題

3. 在坐標空間中，已知 A 為平面 BCD 外一點，且 $\overline{AD}$ 垂直平面 BCD，又 $\overline{AB}$ 垂直 $\overline{BC}$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AD}=4$，$\overline{AC}=8$，如圖，則 $\overline{BD}=$＿＿＿＿＿＿。



解答　$\sqrt{39}$

解析　由題意知$\triangle ACD$為直角三角形，所以$\overline{CD}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$，

又$\overline{AD}$垂直平面BCD，$\overline{AB}$垂直$\overline{BC}$，

所以$\overline{BD}$垂直$\overline{BC}$（三垂線定理），即$\triangle BCD$為直角三角形，

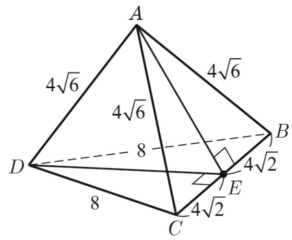
故$\overline{BD}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{39}$。

4. 在四面體$ABCD$中，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=4\sqrt{6}$、$\overline{BD}=\overline{CD}=8$，且$\cos\angle BAC=\dfrac{1}{3}$，則點$D$到平面$ABC$的距離為________。（化成最簡根式）【110學測】

解答　$4\sqrt{2}$

解析　在$\triangle ABC$中，

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A}=\sqrt{96+96-2\times4\sqrt{6}\times4\sqrt{6}\times\frac{1}{3}}=8\sqrt{2}$$



$\because\triangle ABC$與$\triangle BCD$皆為等腰三角形，$\therefore\overline{AE},\overline{DE}$為底高

$\Rightarrow\overline{AE}=\sqrt{(4\sqrt{6})^2-(4\sqrt{2})^2}=8$；$\overline{DE}=\sqrt{8^2-(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{2}$

$\Rightarrow\overline{AD}^2=96=8^2+(4\sqrt{2})^2=\overline{AE}^2+\overline{DE}^2\Rightarrow\triangle ADE$為直角三角形且$\angle AED=90°$

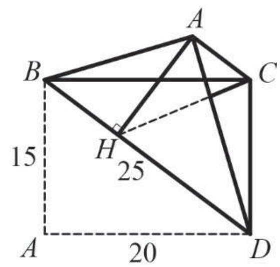
故D到平面ABC的距離$=\overline{DE}=4\sqrt{2}$

5. 將一塊邊長$\overline{AB}=15$公分、$\overline{BC}=20$公分的長方形鐵片$ABCD$沿對角線$\overline{BD}$對摺後豎立，使得平面ABD與平面CBD垂直，則A、C兩點（在空間）的距離$\overline{AC}=$____________公分。（化成最簡根式）

解答　$\sqrt{337}$　【107學測】

解析　利用畢氏定理，得對角線$\overline{BD}=\sqrt{20^2+15^2}=25$，

過A作$\overline{BD}$的垂線，垂足為H，連接$\overline{AH}$與$\overline{CH}$，如圖所示。



因為平面ABD與平面CBD垂直，

所以直線AH垂直平面CBD，因此$\overline{AH}\perp\overline{HC}$。

(I)因為直角三角形ABD的面積$=\dfrac{25\times\overline{AH}}{2}=\dfrac{15\times20}{2}$，所以$\overline{AH}=12$。

(II)在直角三角形ABH中，利用畢氏定理，得$\overline{BH}=\sqrt{15^2-12^2}=9$。

又在$\triangle CBH$中，利用餘弦定理及$\cos\angle CBD=\dfrac{20}{25}=\dfrac{4}{5}$，

得$\overline{CH}^2=20^2+9^2-2\times20\times9\times\dfrac{4}{5}=193\Rightarrow\overline{CH}=\sqrt{193}$。

(III)在直角三角形AHC中，利用畢氏定理，得$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{CH}^2}=\sqrt{144+193}=\sqrt{337}$。

6. 坐標空間中有一長度為17的線段$\overline{PQ}$，若$\overline{PQ}$在xy平面、yz平面上的正射影長度分別為11和$12\sqrt{2}$，則$\overline{PQ}$在xz平面上的正射影長度為__________。

解答　13

解析　令$P(0,0,0)$、$Q(x,y,z)\Rightarrow\overline{PQ}=17$，

所以$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=17$，

即$x^2+y^2+z^2=289\cdots\cdots$(i)，

又Q點在xy平面上的投影點$Q_1(x,y,0)$，

所以$\overline{PQ_1}=\sqrt{x^2+y^2}=11$，即$x^2+y^2=121\cdots\cdots$(ii)，

且Q點在yz平面上的投影點$Q_2(0,y,z)$，

所以$\overline{PQ_2}=\sqrt{y^2+z^2}=12\sqrt{2}$，

即$y^2+z^2=288\cdots\cdots$(iii)，

由(i)(ii)(iii)得$x^2=1$，$z^2=168$，

所以Q點在xz平面上的投影點$Q_3(x,0,z)$，

$\overline{PQ_3}=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{169}=13$，

即$\overline{PQ}$在xz平面上的正射影長度為13。

7. 已知向量$\overrightarrow{v}$與$\overrightarrow{a}=(1,-1,0)$垂直，且與$\overrightarrow{b}=(0,1,-1)$的夾角為$45°$，若$|\overrightarrow{v}|=1$，則$\overrightarrow{v}=$__________（有二解）。

解答　$(0,0,-1)$或$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

解析　令$\overrightarrow{v}=(x,y,z)$，

因為$\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{a}\Rightarrow\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a}=0$，所以$x-y=0$，即$x=y\cdots\cdots$(i)，

又$\overrightarrow{v}$、$\overrightarrow{b}$的夾角為$45°\Rightarrow\cos 45°=\frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{b}|}=\frac{y-z}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$y-z=1$，即$z=y-1\cdots\cdots$(ii)，

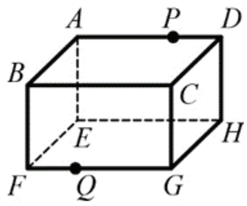
因為$|\overrightarrow{v}|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$，所以$\sqrt{y^2+y^2+(y-1)^2}=1\Rightarrow 3y^2-2y+1=1$，

所以$3y^2-2y=0$，$y(3y-2)=0$，

$y=0$或$\frac{2}{3}$，

故$\overrightarrow{v}=(0,0,-1)$或$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$。

8. 長方體$ABCD-EFGH$，如圖。已知$\overline{AB}=1$，$\overline{AE}=2$，$\overline{AD}=3$，$\overline{PA}=2$，$\overline{FQ}=1$，則$\overline{PQ}=$__________。

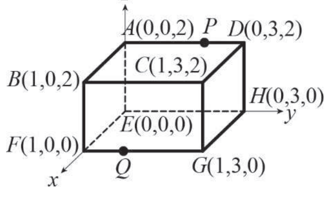


解答　$\sqrt{6}$

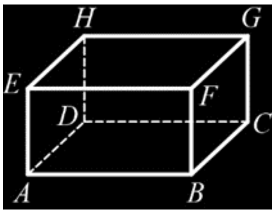
解析　將圖形坐標化，

因為$\overline{PA}=2\Rightarrow P(0,2,2)$，$\overline{FQ}=1\Rightarrow Q(1,1,0)$，

所以$\overline{PQ}=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$。

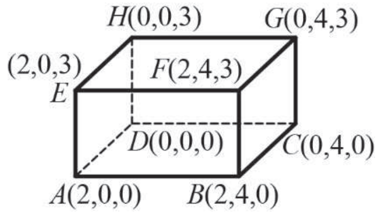


9. 如圖，長方體$ABCD-EFGH$中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=2$，$\overline{AE}=3$，則$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CH}=$__________。



解答　-7

解析　將圖形坐標化，



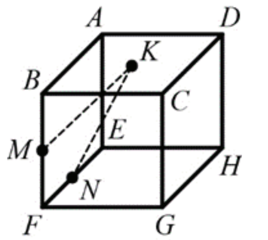
所以 $\overrightarrow{AG}=(-2,4,3)$，$\overrightarrow{CH}=(0,-4,3)$，

故 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CH}=0-16+9=-7$。

三、多選題

10.（　　）如圖所示，正立方體 $ABCD-EFGH$ 的稜長等於 2（即 $\overline{AB}=2$），K 為正方形 $ABCD$ 的中心，M、N 分別為線段 BF、EF 的中點。試問下列哪些選項是正確的？

(A) $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$　(B)內積 $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$　(C) $\overline{KM}=3$　(D)△KMN 為一直角三角形　(E)△KMN 之面積為 $\frac{\sqrt{10}}{2}$



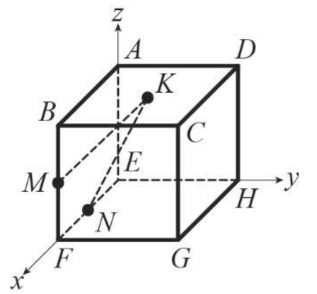
解答　AD

解析　將立體圖形坐標化，如圖，

令 $E(0,0,0)$，因為立方體邊長 2，

所以 $A(0,0,2)$，$B(2,0,2)$，$C(2,2,2)$，$D(0,2,2)$，

$F(2,0,0)$，$G(2,2,0)$，$H(0,2,0)$，$K(1,1,2)$，$M(2,0,1)$，$N(1,0,0)$。



(A)○：$\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$=\frac{1}{2}((2,0,0)-(0,2,0)+(0,0,-2))=\frac{1}{2}(2,-2,-2)=(1,-1,-1)$

(B)╳：$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)\cdot(2,0,0)=2$

(C)╳：$\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$，所以 $|\overrightarrow{KM}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

(D)○：$\overrightarrow{MK}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{MN}=(-1,0,-1)$，所以 $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{MN}=1+0-1=0$，即 $\overrightarrow{MK}\perp\overrightarrow{MN}$，

所以△KMN 為直角三角形

(E)╳：△KMN 面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{MK}\times\overline{MN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$